

Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

[Bat-Zin] : *De l'Analyse fonctionnelle à la Théorie spectrale*, Athanasios Batakis, Michel Zinsmeister

[Ber] : *Équations différentielles*, Florent Berthelin

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-François Dantzer

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

I Partie A - Continuité [Gou][Dan][Ber-Ber]

Prop 1 : Soit E, F espaces métriques compacts et $f : E \rightarrow F$ continue. Alors $f(E)$ est compact.

Cor 2 : Soit $F : E \rightarrow F$ continue et bijective. Si E est compact, alors f^{-1} est continue.

Prop 3 : Si f est une fonction continue sur un compact à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors elle atteint ses bornes.

App 4 : Une application coercive sur $\mathbb{R}^d$ admet un minimum.

Rem 5 : Existence d'extrema

Prop 6 (Rolle) :

Ex 7 : Zéros de polynômes

Thm 8 (Égalité des accroissements finis) :

Contre-Ex 9 : $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(t) = e^{it}$.

Déf 10 (Uniforme continuité) :

Ex 11 : Fonctions lipschitziennes, α -hölderiennes.

Contre-Ex 12 :

Thm 13 (Heine) :

Thm 14 (Weierstrass) : Toute fonction continue sur un intervalle compact est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Dev 15 (Point fixe sur les compacts) : Soit E un espace métrique compact, et $f : E \rightarrow E$, telle que $\forall x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f admet un unique point fixe α et pour tout $x \in E$, la suite des itérés $(f^n(x))_n$ converge vers α .

Dev 16 : Si $a = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{1/d}$, la fonction $f : x \in [0, a] \rightarrow x - x^{d+1} \in [0, a]$ admet un unique point fixe 0, et pour toute suite d'itérées (x_n) telles que $x_0 \neq 0$, on a $x_n \equiv 1/(dn)^{1/d}$.

II Partie B - Compacité dans des espaces normés

II.1 Compacité et dimension finie [Li][Dan]

Thm 17 : Sur un espace vectoriel de dim finie, toutes les normes sont équivalentes

App 18 : Les fermés bornés dans un K -ev de dim finie sont exactement les parties compactes

Ex 19 : $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Thm 20 (Riesz) :

Cor 21 : Si E est de dim infinie, alors ses compacts sont d'intérieur vide.

II.2 Compacité dans des Hilberts [Li]

Déf 22 : La suite $(x_n) \xrightarrow{w} x$ si et seulement si $\forall y \in H, \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

Prop 23 : Si $(x_n) \xrightarrow{w} x$, alors (x_n) est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Ex 24 : Si $(e_n)_n$ est une base hilbertienne, alors $e_n \xrightarrow{w} 0$, mais $\|e_n\| = 1$.

Thm 25 (Banach-Alaoglu) :

III Partie C - Ascoli [Dan][Ber][Ber-Ber]

Déf 26 : Soit E, F deux espaces métriques. On dit que $A \subset \mathcal{C}^0(E, F)$ est équicontinue si :

$$\forall \varepsilon, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E^2, (d_E(x, y) < \eta) \implies (\forall f \in A, d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Thm 27 (Ascoli) :

App 28 (Montel) :

App 29 (Cauchy-Peano) :

IV Partie D - Opérateurs compacts [Li] [Bat-Zin]

IV.1 Définitions et premières propriétés

Déf 30 : $T : E \rightarrow F$ est un opérateur compact si $T(B_E)$ est relativement compact dans F .

Ex 31 : Les opérateurs de rang finis sont compacts.

Ex 32 : Si $K \in L^2([0, 1]^2)$, alors $T_K : f \rightarrow \int_0^1 K(\cdot, y)f(y)dy$ est compact dans $L^2([0, 1])$.

Prop 33 : L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sev fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

App 34 : Une limite d'opérateurs de rang finis est compacte.

Prop 35 : $\mathcal{K}(E, F)$ est un idéal bilatère.

App 36 : Un opérateur compact n'est pas inversible si E et F sont de dim infinie.

Thm 37 (Schauder) : L'opérateur $T : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si $T^* : F^* \rightarrow E^*$ est compact.

IV.2 Analyse spectrale

 **Dév 38 :** Si $T \in \mathcal{K}(E)$:

- (1) $\ker(I - T)$ est de dim finie.
- (2) $R(I - T)$ est fermée
- (3) Si $I - T$ est injectif, alors il est inversible.

 **Dév 39 (Alternative de Fredholm) :**

Thm 40 (Spectre d'un opérateur compact) :

Ex 41 : Spectre de l'opérateur de Volterra / Quasi-Primitive